



ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό σελ.335

A2. Θεωρία σχολικό σελ.246

A3. Θεωρία σχολικό σελ.222

A4. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$z-2 \overline{z-2} + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0 \Leftrightarrow |z-2| - 1 \quad |z-2| + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |z-2| = 1$ ή $|z-2| = -2$ (Απορρίπτεται). Άρα $|z-2| = 1$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνας $\rho = 1$.

Ισχύει: $|z| = |z-2+2| \leq |z-2| + 2 = 3$

B2.

Επειδή z_1, z_2 ρίζες της εξίσωσης $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ ισχύει:

$$z_1 = \overline{z_2} \Leftrightarrow x_1 + y_1i = x_2 - y_2i \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = -y_2$$

$$\text{Όμως } |\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2| = 2 \Leftrightarrow |y_1 - y_2| = 2 \stackrel{y_1 = -y_2}{\Leftrightarrow} |2y_1| = 2 \Leftrightarrow y_1 = \pm 1$$

$$\text{Όμως } |z_1 - 2| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 2^2 + y_1^2} = 1 \Leftrightarrow x_1 - 2^2 + y_1^2 = 1 \stackrel{y_1 = \pm 1}{\Leftrightarrow} x_1 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

$$\text{Άρα } z_1 = 2 + i \text{ και } z_2 = 2 - i$$

Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$z_1 + z_2 = -\beta \Leftrightarrow 4 = -\beta \Leftrightarrow \beta = -4$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{1} \Leftrightarrow 5 = \gamma$$

B3. Έστω $|v| \geq 4$. Έχουμε $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0$. Άρα

$$|v|^3 = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|. \text{ Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι}$$

$$|v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2 v^2| + |\alpha_1 v| + |\alpha_0| = |\alpha_2| |v|^2 + |\alpha_1| |v| + |\alpha_0|$$

Από B1 είναι $|\alpha_0| \leq 3, |\alpha_1| \leq 3, |\alpha_2| \leq 3$, άρα

$$|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3(|v|^2 + |v| + 1). \text{ Η τελευταία γράφεται}$$

$$|v|^3 \leq 3 \frac{|v|^3 - 1}{|v| - 1} \text{ (είναι } |v| - 1 > 0 \text{ εφόσον } |v| \geq 4) \Leftrightarrow |v|^3 |v| - 1 \leq 3 |v|^3 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |v|^4 \leq 4|v|^3 - 3. \text{ Όμως } 4|v|^3 - 3 < 4|v|^3. \text{ Άρα } |v|^4 \leq 4|v|^3 \Leftrightarrow |v| < 4 \text{ που είναι άτοπο. Άρα } |v| < 4$$

ΘΕΜΑ Γ**Γ1.**

$2f(x) + x \cdot f'(x) + 1 = 2x \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = (x^2)'$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από συνέπειες

Θ.Μ.Τ ισχύει $f(x) + x^2 = x^2 + c$. Για $x = 0$ τότε $f(0) = c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα

$$f(x) + x^2 = x^2 + 1 \quad (1)$$

Θεωρώ $h(x) = f(x) + x$ η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως άθροισμα συνεχών. Άρα $h^2(x) = x^2 + 1 > 0 \Rightarrow h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως, $h(0) = f(0) = 1 > 0 \Rightarrow h(x) > 0$. Από τη σχέση (1) ισχύει

$$h^2(x) = x^2 + 1 \stackrel{h(x)>0}{\Rightarrow} h(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

Γ2. Θα αποδείξω ότι: $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- Αν $x \leq 0$, προφανώς $f(x) > 0$
- Αν $x > 0$, $\sqrt{x^2 + 1} > x \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει. Άρα $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Για το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ ισχύει:

$$A_{f \circ g} = x \in A_g / g(x) \in A_f = x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} οπότε και 1-1. Ισχύει:

$$f \circ g(x) = 1 \Leftrightarrow f \circ g(x) = f(0) \stackrel{f_{1-1}}{\Leftrightarrow} g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1. \text{ Το πρόσημο της } g' \text{ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
f' x		+	0	-	0	+
f x		\nearrow		\searrow		\nearrow

$g \left(-\infty, -1 \right] \stackrel{g \nearrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(-1) \right) = \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right]$. Άρα η $g(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $-\infty, -1$.

$g \left(-1, 0 \right) \stackrel{g \searrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) \right) = \left(-1, -\frac{1}{2} \right)$. Άρα $g(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $-1, 0$

$g \left[0, +\infty \right) \stackrel{g \nearrow}{=} \left[g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = \left[-1, +\infty \right)$. Επειδή η τιμή $0 \in g \left[0, +\infty \right)$ η $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[0, +\infty)$ καθώς η g είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. Θεωρώ συνάρτηση $\varphi(x) = \int_{x-\pi/4}^0 f(t) dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x$.

Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και $0, x - \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση $\int_{x-\pi/4}^0 f(t)dt$ είναι

παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής. Η συνάρτηση $f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών άρα $\varphi(x)$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Επομένως η συνάρτηση φ είναι

- συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
- $\varphi(0) = \int_{-\pi/4}^0 f(t) dt > 0$ διότι $f(t) > 0$
- $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f(0) = -1 < 0$ διότι $f(t) > 0$

Άρα $\varphi(0) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$. Επομένως από το θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ τέτοιο ώστε } \varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\pi/4}^0 f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = l_1 - l_2 = 6f'(1) \quad \text{σχέση (1)} \end{aligned}$$

για το l_1 θέτω $u=5h$. Αν $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow u \rightarrow 0$

$$l_1 = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{\frac{u}{5}} = 5 \cdot f'(1)$$

για το l_2 θέτω $t=-h$. Αν $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$

$$l_2 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{-t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = -f'(1)$$

Άρα $f'(1) = 0$.

για κάθε $0 < x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	0	1	+∞
f'		-	+
f		↘	↗

min=f(1)

Δ2.

Η συνάρτηση $h(t) = \frac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (η $f(t)$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη) στο $(1, +\infty)$ και $a \in (1, +\infty)$. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη με:

$$g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1} > 0 \text{ επειδή για κάθε } x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 1 \Rightarrow f(x) - 1 > 0 \text{ και } x-1 > 0. \text{ Άρα } g \uparrow$$

$$\text{Έστω } h(x) = \int_{x+5}^{x+6} g(u) du = - \int_{\alpha}^{x+5} g(u) du + \int_{\alpha}^{x+6} g(u) du \text{ με } x > 1$$

η h είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων γιατί η $g(u)$ συνεχής στο $(1, +\infty)$ και $a \in (1, +\infty)$, $x+6, x+5 \in (1, +\infty)$

Άρα οι συναρτήσεις $\int_{\alpha}^{x+5} g(u) du$, $\int_{\alpha}^{x+6} g(u) du$ είναι παραγωγίσιμες.

$$h'(x) = g(x+6)(x+6)' - g(x+5)(x+5)' = g(x+6) - g(x+5) > 0 \text{ γιατί}$$

η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ και $x+6 > x+5$ άρα $g(x+6) > g(x+5)$. Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα.

Ισχύει:

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \Leftrightarrow h(8x^2) > h(2x^4) \Leftrightarrow 8x^2 > 2x^4 \Leftrightarrow 4x^2 > x^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

Όμως για $x=0$ η δοσμένη ανίσωση δεν ισχύει. Άρα $-2 < x < 0$, $0 < x < 2$.

Δ3. Ισχύει $g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt$, $x \in (1, +\infty)$ και $a > 1$

η g είναι παραγωγίσιμη από Δ2 ερώτημα με $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$

η g' είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (f(x)-1)}{(x-1)^2} \quad (1)$$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1, x]$, $x > 1$.

η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, x] \subseteq (0, +\infty)$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x)$

ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f(x)-1}{x-1}$ (2) για το ξ ισχύει $1 < \xi < x$ και η f' είναι

γνησίως αύξουσα.

Άρα

$$f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow 0 < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0)) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$$

Άρα η g είναι κυρτή.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο σημείο με $x_0 = a$ είναι

$$y - g(a) = g'(a)(x - a)$$

$$\text{όμως } g(a) = \int_a^a \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = 0 \text{ και } g'(a) = \frac{f(a) - 1}{a - 1}$$

$$\text{Άρα } y = \frac{f(a) - 1}{a - 1} \cdot (x - a)$$

όμως η g είναι κυρτή οπότε ισχύει:

$$g(x) \geq \frac{f(a) - 1}{a - 1} \cdot (x - a) \text{ για κάθε } x > 1 \text{ και η ισότητα ισχύει μόνο για } x = a. \text{ Άρα η}$$

$$\text{εξίσωση } g(x) = \frac{f(a) - 1}{a - 1} \cdot (x - a) \text{ έχει ακριβώς μία λύση τη } x = a.$$

$$\text{Όμως } \int_a^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = \frac{f(a) - 1}{a - 1} (x - a)$$

$$(a - 1) \int_a^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = (f(a) - 1)(x - a)$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση.