

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2012**

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη Σελ. 253

A2. Ορισμός Σελ 191

A3. Ορισμός Σελ 258

A4.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) = 4 \Leftrightarrow |z|^2 - z - \bar{z} + 1 + |z|^2 + z + \bar{z} + 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$2|z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 1$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

B2.

Αφού οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στο κύκλο επομένως

$$|z_1| = |z_2| = 1.$$

Υψώνουμε την δοσμένη σχέση στο τετράγωνο οπότε

$$|z_1 - z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + 1 = 2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 0$$

Είναι επίσης $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 = 1 + 0 + 1 = 2$

Άρα $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$ αφού $|z_1 + z_2| > 0$.

B3.

Θέτουμε $w = x + yi$.

Επομένως,

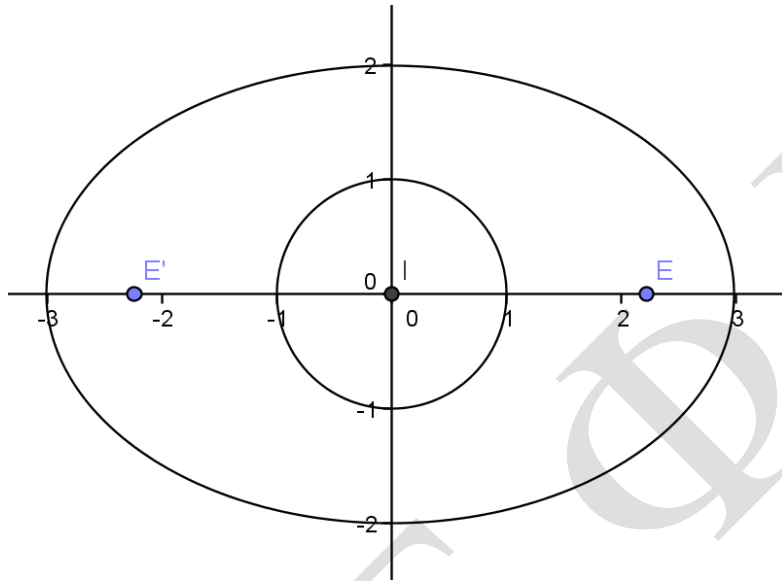
$$|w - 5\bar{w}| = 12 \Leftrightarrow |x + yi - 5x + 5yi| = 12 \Leftrightarrow |-4x + 6yi| = 12 \Leftrightarrow 16x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι έλλειψη με $a=3, \beta=2, \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 9-4=5 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{5}$ και εστίες $E(\sqrt{5}, 0), E'(-\sqrt{5}, 0)$.

Η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι $a=3$ ενώ η ελάχιστη είναι $a=2$. Επομένως είναι και $2 \leq |w| \leq 3$.

B4.



1^{ος} τρόπος

Γεωμετρικά έχουμε,

Η μέγιστη τιμή του $|z-w|$ είναι $\rho+a=1+3=4$ και η ελάχιστη τιμή του είναι $\beta-\rho=2-1=1$.

Άρα $1 \leq |z-w| \leq 4$

2^{ος} τρόπος

Είναι $2 \leq |w| \leq 3 \Leftrightarrow 2+|z| \leq |w|+|z| \leq 3+|z| \Leftrightarrow 3 \leq |w|+|z| \leq 4$ \curvearrowright .

Επίσης είναι $2 \leq |w| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq -|w| \leq -2 \Leftrightarrow |z|-3 \leq |z|-|w| \leq |z|-2 \Leftrightarrow -2 \leq |z|-|w| \leq -1$ και άρα $|z|-|w| < 0$ \curvearrowright .

Τέλος είναι και $2 \leq |w| \leq 3 \Leftrightarrow 2-|z| \leq |w|-|z| \leq 3-|z| \Leftrightarrow 1 \leq |w|-|z| \leq 3$ \curvearrowright .

Από τριγωνική ανισότητα και τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε,

$$\left| |z|-|w| \right| \leq |z-w| \leq |z|+|w| \Leftrightarrow |w|-|z| \leq |z-w| \leq |z|+|w| \Leftrightarrow 1 \leq |z-w| \leq 4.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$. Προφανής ρίζα η $x=1$ αφού $f'(1) = 0$. Είναι $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ και επομένως η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα. Το πρόσημο της συνάρτησης f' είναι για $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$ άρα $f'(x) > 0$, ενώ για $x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$ είναι $f'(x) < 0$.

x	0	1	$+\infty$
f'		- 0 +	
f	↓	↑	

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x=1$ το $f(1) = -1$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1) \ln x - 1 = +\infty - 1 = +\infty$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) \ln x - 1 = -\infty - 1 = -\infty$.

Επομένως είναι $f: \mathbb{A}_1 \xrightarrow{f \downarrow} \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty)$ και $f: \mathbb{A}_2 \xrightarrow{f \uparrow} \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (-\infty, 1)$,

άρα το σύνολο τιμών είναι $f(\mathbb{A}) = \mathbb{R}$.

Γ2.

Η εξίσωση γίνεται,

$$x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1} = \ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1) \ln x = 2013 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 2013 \Leftrightarrow f(x) = 2012$$

Αφού το $2012 \in f(\mathbb{A}_1)$ και η συνάρτηση f γνησία μονότονη στο Δ_1 τότε η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1 . Ομοίως η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2 . Άρα η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ3.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(e^x) - 2012e^x$, $x > 0$.

Η h συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Η h παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = f'(e^x) + f(e^x) - 2012e^x.$$

Είναι και

$$h(x_1) = f(e^{x_1}) - 2012e^{x_1} = 2012e^{x_1} - 2012e^{x_1} = 0 \text{ και}$$

$$h(x_2) = f(e^{x_2}) - 2012e^{x_2} = 2012e^{x_2} - 2012e^{x_2} = 0$$

Άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$, έτσι ώστε

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(e^{x_0}) + f(e^{x_0}) - 2012e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(e^{x_0}) + f(e^{x_0}) = 2012e^{x_0}$$

Γ4.

$$\text{Είναι } g(x) = f(x) + 1 = (x-1) \ln x, \quad x > 0$$

Λύνουμε την εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \ln x = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } \ln x = 0$ άρα $x=1$ ή $x=1$. Οπότε $x=1$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $\ln x > 0$ οπότε $g(x) = (x-1) \ln x \geq 0$ στο $[1, e]$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι,

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (x-1) \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)' \ln x dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx \\ &= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln x \right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} - x \right]_1^e = \dots = \frac{e^2 - 3}{4} \quad \tau.μ \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt - \frac{x-x^2}{e}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής άρα ολοκληρώσιμη. Επομένως η $h(x) = \int_1^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα η $h(x^2-x+1)$ είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων με $h'(x^2-x+1) = f(x^2-x+1) \cdot (x-1)$.

Είναι $g(x) \geq g(1)$ για κάθε $x > 0$. Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$. Το 1 εσωτερικό σημείο του $A_g = (0, +\infty)$. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = f(x^2-x+1) \cdot (x-1) - \frac{1-2x}{e}$. Επομένως από θεώρημα Fermat είναι $g'(1) = 0 \Rightarrow f(1) \cdot \frac{1}{e} = 0 \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, τότε η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και αφού $f(1) = -\frac{1}{e} < 0$, τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση s με τύπο $s(x) = \ln x - x$, $x > 0$. Η συνάρτηση s είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $s'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

x	0	1	$+\infty$
s'		+	-
s		↑	↓

Η συνάρτηση s παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση 1 ίσο με $s(1) = -1$. Άρα $s(x) \leq s(1) \Rightarrow \ln x - x \leq -1 < 0$. Επομένως $\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) f(x) \leq 0$, άρα $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \neq 0$, επομένως $f(x) = \frac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e}$. Άρα αφού το δεύτερο μέρος είναι πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Άρα $\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = \int \frac{\ln t - t}{f(t)} dt$,

παραγωγίσιμη με $G'(x) = \frac{\ln x - x}{f(x)}$ τότε . Οπότε

$$G'(x) = G(x) + e \Leftrightarrow (G(x) + e)' = G(x) + e \Leftrightarrow e^{-x} (G(x) + e)' + (e^{-x})' (G(x) + e) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{G(x) + e}{e^x} \right)' = 0 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και επομένως } \frac{G(x) + e}{e^x} = c \Leftrightarrow G(x) + e = ce^x. \text{ Για}$$

$x > 1$ είναι $G(x) = 0$ επομένως $c = 1$ και άρα $G(x) + e = e^x \Leftrightarrow G(x) = e^x - e$ με

$$G'(x) = e^x \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x. \text{ Συνεπώς ο τύπος της συνάρτησης είναι}$$

$$f(x) = e^{-x} (\ln x - x), \quad x > 0.$$

Δ2.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - x}{e^x} = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[f^2(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]. \text{ Θέτουμε } \frac{1}{f(x)} = t. \text{ Για } x \rightarrow 0^+ \text{ τότε } t \rightarrow 0^-.$$

Άρα το όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[f^2(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\eta\mu t}{t^2} - \frac{1}{t} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu t - t}{t^2} \stackrel{0}{=} \frac{0}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\eta t - 1}{t} = 0.$$

Δ3.

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη αφού η f είναι συνεχής και επομένως ολοκληρώσιμη με $F'(x) = f(x)$.

$$\text{Άρα } F''(x) = f'(x) = \left[e^{-x} (\ln x - x) \right]' = \frac{-\left(\ln x - x + 1 - \frac{1}{x} \right)}{e^x} > 0 \text{ αφού } \ln x - x + 1 \leq 0$$

από υπόθεση και $-\frac{1}{x} < 0$ για κάθε $x > 0$. Επομένως $F''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, και άρα η συνάρτηση F είναι κυρτή και άρα η F' γνησίως αύξουσα.

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[2x^-]$ και στο $[x, 3x^-]$. Άρα εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ υπάρχουν $\xi_1 \in (2x^-)$ και $\xi_2 \in (x, 3x^-)$ με $F'(\xi_1) = \frac{F(2x^-) - F(x)}{x}$ και

$F'(\xi_2) = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$. Είναι $\xi_1 < \xi_2$ και επειδή η συνάρτηση F' γνησίως αύξουσα είναι και

$$F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \stackrel{\Delta 3}{\Rightarrow} F(x_2) - F(\xi_1) < F(x_2) - F(\xi_2) \Rightarrow F(\xi_1) + F(x_2) > 2F(\xi_2)$$

Δ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta) \text{ στο } [\beta, 3\beta].$$

Η ϕ συνεχής στο $[\beta, 3\beta]$ ως πράξεις συνεχών.

$$\text{Είναι } \phi(\beta) = F(\beta) - F(3\beta) \text{ και } \phi(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$$

Είναι $F'(x) = f(x) < 0$ άρα η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Επομένως για $\beta < 3\beta \Rightarrow F(\beta) > F(3\beta)$ και άρα $\phi(\beta) > 0$. Επίσης $\phi(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$ από το Δ3.

Άρα $\phi(\beta) \cdot \phi(2\beta) < 0$ και επομένως από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\beta, 2\beta)$ με $\phi(\xi) = 0$. Όμως $\phi'(x) = f(x) < 0$, άρα η συνάρτηση ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και επομένως το ξ είναι μοναδικό.