ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Έστω $\vec{\alpha},\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$. Αν $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$ είναι η προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$, να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

Μονάδες 7

Α.2. Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

Μονάδες 4

Α.3. Πως ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ με $\vec{\alpha}\not\parallel y'y$;

Μονάδες 4

Α.4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

i. Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ είναι της μορφής $y-y_0=\lambda(x-x_0)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$ και $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$.

iii. Η εκκεντρότητα της έλλειψης $(C):\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\alpha>\beta>0$ είναι πάντοτε ίση με $\frac{\beta}{\alpha}$.

iv. Αν $A(x_1,y_1)$ είναι σημείο του κύκλου $C:x^2+y^2=\rho^2$, όπου $0<\rho\neq1$ τότε η εφαπτομένη του C στο A έχει εξίσωση: $x\,x_1+y\,y_1=\rho$.

v. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $(C):\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία $A\left(1,-\frac{3}{2}\right)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma\left(\kappa,\frac{\kappa-4}{2}\right)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

Β.1. Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 9

Β.2. Να αποδείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BO}$ είναι αμβλεία, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 8

Β.3. Αν $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=2\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2$, να βρείτε τον αριθμό κ $(\kappa\in\mathbb{R})$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(1-x)-\lambda y+\frac{1+x}{4}=0$ (1), όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ.1. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθείες, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ.2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο από το οποίο να διέρχονται όλες οι ευθείες της μορφής (1).

Μονάδες 8

Γ.3. Αν (ε_1), (ε_2) είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για $\lambda=1$ και $\lambda=-1$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζουν οι (ε_1), (ε_2) με τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 6

Γ.4. Να βρείτε το σημείο της (ε_1), το οποίο απέχει από την αρχή των αξόνων τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2+2y^2+(2\lambda-4)x+(2\lambda+4)y+\lambda^2=0$ (1), όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Δ.1. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει ίσους κύκλους.

Μονάδες 4

Δ.2. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων είναι σημεία της ευθείας (ε) με εξίσωση: $x-y-2=0$.

Μονάδες 4

Δ.3. Να αποδείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι της μορφής (1) εφάπτονται δύο ευθειών (δ_1), (δ_2) των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

Μονάδες 9

Δ.4. Έστω η παραβολή $(C): x^2=2py$ και η ευθεία (ε) του ερωτήματος **Δ.2.** Αν η (ε) είναι εφαπτομένη της παραβολής, να βρείτε:

i. την παράμετρο p, την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

Μονάδες 4

ii. την εφαπτομένη (η) της παραβολής, η οποία είναι κάθετη στην (ε).

Μονάδες 4

Σας ευχόμαστε επιτυχία