

**ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ**

**Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013**

**Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Βλέπε απόδειξη (1) σελίδα 62 σχολικού βιβλίου.
- A2.** α) Βλέπε ορισμό σελίδα 72 σχολικού βιβλίου.  
β) Βλέπε ορισμό σελίδα 57 σχολικού βιβλίου.
- A3.** α) Σωστό (βλέπε σελίδα 55 σχολικού βιβλίου.)  
β) Λάθος (βλέπε σελίδα 69 σχολικού βιβλίου.)  
(Το Σωστό είναι ότι  $\sqrt{a^2} = |a|$ )  
γ) Λάθος (βλέπε σελίδα 79 σχολικού βιβλίου.)  
(Το Σωστό είναι ότι η εξίσωση  $ax + b = 0$  είναι αδύνατη)  
δ) Σωστό (βλέπε σελίδα 62 σχολικού βιβλίου.)  
ε) Σωστό (βλέπε σελίδα 107 σχολικού βιβλίου.)

**ΘΕΜΑ Β**

- B1.** Για την παράσταση  $\sqrt{\sqrt{2^3 \cdot 2}}$  ισχύει:
- $$\sqrt{\sqrt{2^3 \cdot 2}} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 2^1} = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{16} = 2 \quad (1)$$
- οπότε η παράσταση A γίνεται:
- $$A = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt{2^3 \cdot 2}} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{2^4} = \sqrt[3]{4} \cdot 2 = \sqrt[3]{4 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

- B2.** Έχουμε:

$$B = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (2 - \sqrt{2}) + 1 \cdot (2 + \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}}{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{4}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

**B3.** Στο ερώτημα B1 έχουμε αποδείξει ότι  $A = 2$ , οπότε η παράσταση του δεύτερου μέλους της εξίσωσης ισούται με:

$$\frac{1}{A+\sqrt{A}} + \frac{1}{A-\sqrt{A}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} = B = 2$$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$x^3 = \frac{1}{A+\sqrt{A}} + \frac{1}{A-\sqrt{A}} \Leftrightarrow x^3 = B \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Όταν δύο μη κατακόρυφες ευθείες είναι παράλληλες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης. Ο συντελεστής διεύθυνσης της  $\varepsilon$  είναι  $|a-3|-1$ . Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση  $y=x$  είναι 1. Επομένως

$$\begin{aligned} |a-3|-1 &= 1 \Leftrightarrow |a-3| = 1+1 \Leftrightarrow |a-3| = 2 \Leftrightarrow \\ a-3 &= 2 \quad \text{ή} \quad a-3 = -2 \Leftrightarrow \\ a &= 3+2 \quad \text{ή} \quad a = 3-2 \Leftrightarrow \\ a &= 5 \quad \text{ή} \quad a = 1. \end{aligned}$$

Θα εξετάσουμε αν είναι δεκτές και οι δύο τιμές του  $a$ .

- Για  $a = 5$  η ευθεία  $\varepsilon$  γίνεται:

$$y = (|5-3|-1)x + (5^2 + 2|5|-3) \Leftrightarrow y = (2-1)x + (25+10-3) \Leftrightarrow y = x+32,$$

η οποία είναι παράλληλη με την  $y=x$ .

- Για  $a = 1$  η  $\varepsilon$  γίνεται:

$$y = (|1-3|-1)x + (1^2 + 2|1|-3) \Leftrightarrow y = (|-2|-1)x + (1 + 2-3) \Leftrightarrow y = x$$

η οποία ταυτίζεται με την  $y=x$ . Άρα η τιμή  $a = 1$  απορρίπτεται.

Ωστε είναι  $a = 5$ .

**Γ2.** Επειδή η γωνία  $\omega$ , που σχηματίζει η ευθεία ( $\varepsilon$ ) με τον άξονα  $xx$  είναι οξεία, έχει  $\varepsilon\varphi\omega > 0$ . Όμως, ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ( $\varepsilon$ ) ισούται με την  $\varepsilon\varphi\omega$ , οπότε

$$\begin{aligned} |a-3|-1 > 0 &\Leftrightarrow |a-3| > 1 \Leftrightarrow a-3 < -1 \quad \text{ή} \quad a-3 > 1 \Leftrightarrow \\ a &< 3-1 \quad \text{ή} \quad a > 3+1 \Leftrightarrow a < 2 \quad \text{ή} \quad a > 4 \end{aligned}$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2013**

**E\_3.M1A(α)**

**Γ3.** Πρέπει και αρκεί οι συντεταγμένες του  $O(0,0)$  να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Για  $x = y = 0$  η εξίσωση της  $\varepsilon$  δίνει:

$$0 = (|a-3|-1) \cdot 0 + (a^2 + 2|a| - 3) \Leftrightarrow a^2 + 2|a| - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$|a|^2 + 2|a| - 3 = 0$$

Θέτουμε:

$$|a| = \omega \geq 0 \tag{1}$$

Η εξίσωση γίνεται:

$$\omega^2 + 2\omega - 3 = 0$$

Αυτή έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες τις

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$

Είναι:

$$\omega_1 = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad \omega_2 = \frac{-2-4}{2} = -3 \text{ που απορρίπτεται.}$$

Για  $\omega = 1$  η (1) δίνει

$$|a| = 1 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ή } a = -1$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Το τρίγωνο έχει  $\alpha=4$ ,  $\beta=-4\lambda$ ,  $\gamma=5\lambda$  και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4\lambda)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5\lambda = 16\lambda^2 - 80\lambda$$

Είναι:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 - 80\lambda = 0 \Leftrightarrow 16\lambda(\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 5.$$

Το πρόσημο της διακρίνουσας φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

$\lambda$	$-\infty$	$0$	$5$	$+\infty$
$\Delta$	$+$	$0$	$-$	$+$

Επομένως για  $\lambda = 0$  ή  $\lambda = 5$  είναι  $\Delta = 0$  και

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty) \text{ ενώ } \Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (0, 5)$$

**Δ2. α.** Το τριώνυμο έχει δυο ρίζες άνισες αν και μόνο αν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$$

**β.** Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  αν και μόνο αν

$$4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αυτό ισχύει αν και μόνο αν

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \in [0, 5]$$

**Δ3.** Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες  $x_1, x_2$  άνισες πρέπει

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$$

Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-(-4\lambda)}{4} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{4\lambda}{4} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \lambda$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{5\lambda}{4}$$

Επομένως

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5\lambda}{4} - 1 \Leftrightarrow 4\lambda = 5\lambda - 4 \Leftrightarrow 5\lambda - 4\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

Όμως το  $4 \notin (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$ , επομένως δεν υπάρχει τιμή του  $\lambda$ , ώστε να είναι  $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 - 1$

Δ4. Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A$  και  $A'$  είναι

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq P(A') \leq 1$$

- Το τριώνυμο  $4x^2 - 4P(A)x + 5P(A)$  είναι της μορφής  $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$  με  $\lambda = P(A)$ . Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα  $\Delta_1 \leq 0$ , επομένως

$$4x^2 - 4P(A)x + 5P(A) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- Το τριώνυμο  $4x^2 - 4P(A')x + 5P(A')$  είναι της μορφής  $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$  με  $\lambda = P(A')$ . Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα  $\Delta_2 \leq 0$ , επομένως

$$4x^2 - 4P(A')x + 5P(A') \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

- Για την πιθανότητα του δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι  $P(\Omega) = 1$ . Έτσι  $4x^2 - 4P(\Omega)x + 5P(\Omega) = 4x^2 - 4x + 5$ , που είναι της μορφής  $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$  με  $\lambda = P(\Omega) = 1$ . Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα  $\Delta_3 \leq 0$ ,

επομένως

$$4x^2 - 4x + 5 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει:

$$[4x^2 - 4P(A)x + 5P(A)] [4x^2 - 4P(A')x + 5P(A')] [4x^2 - 4P(\Omega)x + 5P(\Omega)] \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$