

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:** ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

**Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 5**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο  $x_0 \in A$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = a^x, a > 0$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = a^x \ln a$ .

**Μονάδες 6**

**A4.** Να βρείτε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς και ποιοι ψευδείς:

**i.** Μια συνάρτηση είναι 1-1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με ίδια τεταγμένη.

**Μονάδες 2**

**ii.**  $i^{4n+3} = i$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Μονάδες 2**

**iii.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

**iv.** Αν δύο μεταβλητά μεγέθη  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $y = f(x)$ , όταν  $f$  είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε ο ρυθμός μεταβολής του  $y$  ως προς  $x$  στο σημείο  $x_0$  είναι η παράγωγος  $y = f'(x_0)$ .

**Μονάδες 2**

**v.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε τα εσωτερικά σημεία  $x_0$  του  $\Delta$ , στα οποία  $f'(x_0) \neq 0$ , δεν είναι θέσεις τοπικών ακρότατων της  $f$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = e^{x-2}$  και  $g(x) = \ln x + 2$ .

**B1.** Να βρείτε τις συνθέσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$  και να εξετάσετε αν είναι ίσες.

Μονάδες 6

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει αντίστροφη και να βρείτε την  $f^{-1}$ .

Μονάδες 6

**B3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $e^{x-2} = \ln x + 2$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(e^{-2}, 2)$ .

Μονάδες 6

**B4.** Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{(g \circ f)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{(f \circ g)(x)} = 0$$

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ Γ**

Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$(1 + 3\alpha^2) f(x) = e^{\int_x^1 2t f(t) dt},$$

όπου  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

i. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με  $f'(x) = -2x f^2(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

ii.  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 4

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η τιμή του ολοκληρώματος  $\int_0^\alpha t f(t) dt$  είναι ανεξάρτητη του  $\alpha$ .

Μονάδες 4

**Γ3.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την  $f$ .

Μονάδες 8

**Γ4.** Αν  $E$  είναι το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τους άξονες, την γραφική παράσταση της  $f$  και την ευθεία  $x = \alpha$ , να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$$

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Δ**

Η συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f(0) = 2$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 2e^{x+2}}{x + 2} = -1 \text{ και } f''(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

**Δ1.**  $f'(-2) = 1$  και  $f(x) \leq x + 4$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο σε σημείο  $x_0 \in (-2, 0)$ .

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Η εξίσωση

$$f''\left(\int_0^{2(x-5)} f(t-x) dt\right) = f'(0)$$

έχει μοναδική λύση στο  $\mathbb{R}$  την  $x = 5$ .

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Ο μιγαδικός αριθμός  $z$  για τον οποίο ισχύει

$$f(|z + i|) \leq f(|z| + 1)$$

είναι φανταστικός.

**Μονάδες 6**