ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 94.

Α.2. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 95 .

Α.3.
α) Σωστό
β) Λάθος
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Λάθος

Α.4.

Αριθμός	Με μορφή λογαρίθμου	Με μορφή δύναμης
8	$\log_7 7^8$	$3^{\log_3 8}$
4	$\log_3(3^4)$	$8^{2\log_8 2}$
2012	$\log 10^{2012}$	$e^{\ln 2012}$

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1=0$ (1).
Επειδή όλοι οι συντελεστές είναι ακέραιοι, οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, είναι το -1 ή το 1.
Το -1 δεν είναι ρίζα, γιατί $f(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2+1=-4$.
Ενώ το 1 είναι ρίζα, γιατί $f(1)=2(1)^3-3(1)^2+1=0$.
Με εφαρμογή του σχήματος Horner έχουμε:

2	-3	0	1	ρ=1
↓	2	-1	-1	
2	-1	-1	0	

Η εξίσωση (1) είναι τώρα ισοδύναμη με την $(x-1)(2x^2-x-1)=0$.
Έτσι, $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
ή $2x^2-x-1=0$ με ρίζες $x=1$ ή $x=-\frac{1}{2}$ αφού Δ=9.

Οι ρίζες λοιπόν της εξίσωσης (1) είναι $x=-\frac{1}{2}$ ή x=1 (διπλή).

Β.2. Επειδή το $\alpha=1$ είναι η διπλή ρίζα τότε:

$\eta\mu x=1 \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ $(\kappa\in\mathbb{Z})$ ή

$x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ $(\kappa\in\mathbb{Z})$. Όμοια, το $\beta=-\frac{1}{2}$ είναι η άλλη ρίζα οπότε:

$\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu(\pi-\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}$ ή $x=2\kappa\pi-\frac{2\pi}{3}$ $(\kappa\in\mathbb{Z})$.

Β.3. Επειδή η γραφική παράσταση της f δεν είναι πάνω από τον άξονα x΄x πρέπει: $f(x)\le 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2-x-1)\le 0$. Το πρόσημο της $f(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
x-1		-		-	0	+	
$2x^2$-x-1		+	0	-	0	+	
f(x)		-	0	+	0	+	

Έτσι, οι τιμές των $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x είναι: $x\le-\frac{1}{2}$ ή x=1.

Β.4. Έχουμε $f(-x)=2(-x)^3-3(-x)^2+1=-2x^3-3x^2+1$.
Εκτελούμε την ευκλείδεια διαίρεση, όπως φαίνεται παρακάτω:

$-2x^3-3x^2+0x+1$	x^2+1
$2x^3\quad +2x$	$-2x-3$
$-3x^2+2x+1$	
$+3x^2\quad +3$	
$2x+4$	

Το πηλίκο είναι: $\pi(x)=-2x-3$ και το υπόλοιπο: $\upsilon(x)=2x+4$.
Επομένως, $f(-x)=(x^2+1)(-2x-3)+(2x+4)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Αφού $\ln\alpha, \ln\beta, \ln\gamma$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει:

$2\ln\beta = \ln\alpha + \ln\gamma \Leftrightarrow \ln\beta^2 = \ln(\alpha\gamma) \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma$ (1).

Για την συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \overset{(1)}{=} \beta^2 - 4\beta^2 = -3\beta^2 < 0$, αφού $\beta > 0$.

Επειδή $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$ είναι $f(x) > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Έτσι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το $\mathbb{R}$.

Γ.2 **α)** Είναι $\alpha_1 = \alpha = \ln e = 1,\ \alpha_2 = e^{\ln\beta} = \beta,\ \alpha_3 = 10^{\log\gamma} = \gamma$.

Επειδή $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, όπου λ ο λόγος της προόδου, τότε για $\nu = 5$ έχουμε $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^4$. Έχουμε $\alpha_5 = 256$ και $\alpha_1 = 1$, επομένως $256 = 1\cdot\lambda^4 \Leftrightarrow \lambda^4 = 4^4 \Leftrightarrow \lambda = 4$ ή $\lambda = -4$.

Επειδή $\lambda = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{1} > 0$ τότε η τιμή $\lambda = -4$ απορρίπτεται.

Για $\lambda = 4$ έχουμε $\beta = \alpha_1 \cdot \lambda = 4$ και $\gamma = \beta\cdot\lambda = 4\cdot 4 = 16$.

Έτσι, λοιπόν $\alpha = 1, \beta = 4$ και $\gamma = 16$.

β) Για $\alpha = 1, \beta = 4, \gamma = 16$ είναι $f(x) = x^2 + 4x + 16$ και $g(x) = \eta\mu^2 x + 21$.

Η εξίσωση $f(\sigma\upsilon\nu x) = g(x)$ είναι ισοδύναμη με την

$\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\sigma\upsilon\nu x + 16 = \eta\mu^2 x + 21 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x + 4\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu^2 x - 5 = 0$ (2).

Επειδή $\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$ τότε από τη (2) έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\sigma\upsilon\nu x - 1 + \sigma\upsilon\nu^2 x - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\sigma\upsilon\nu x - 6 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$ (3).

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = y$ όπου $-1 \le y \le 1$ οπότε η (3) γίνεται $y^2 + 2y - 3 = 0$ με ρίζες $y = 1$ ή $y = -3$. Η $y = -3$ απορρίπτεται.

Για $y = 1$ έχουμε: $\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

Όμως, $x \in (0, 4\pi] \Leftrightarrow 0 < x \le 4\pi \Leftrightarrow 0 < 2\kappa\pi \le 4\pi \Leftrightarrow 0 < \kappa \le 2$.

Ο κ είναι ακέραιος, οπότε $\kappa = 1$ ή κ=2 .

Για $\kappa = 1 : x = 2\pi$ και για $\kappa = 2 : x = 4\pi$.

Γ.3. Αφού $\omega > 0$ τότε $\beta_1 = 2\pi$ και $\beta_2 = 4\pi$. Η διαφορά είναι: $\omega = \beta_2 - \beta_1 = 2\pi$.

Ο νιοστός όρος της αριθμητικής προόδου (β_ν) είναι:

$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1)\omega = 2\pi + (\nu - 1)2\pi = 2\pi\nu$.

Το άθροισμα των ν πρώτων δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \dfrac{\nu}{2}(\beta_1 + \beta_\nu)$.

Επειδή $S_\nu = 2550\pi$ έχουμε:

$$2550\pi = \frac{\nu}{2}(2\pi + 2\pi\nu) \Leftrightarrow 2550\pi = \nu\pi(\nu+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \nu(\nu+1) = 2550 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 2550 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 1^2 - 4\cdot(-2550) = 10201 = 101^2$.

Έτσι, $\nu = \dfrac{-1+101}{2} = 50$ ή $\nu = \dfrac{-1-101}{2} = -51$.

Επειδή ο ν είναι θετικός ακέραιος, τότε $\nu = 50$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Για να ορίζεται η g πρέπει να ισχύει $x > 0$.
Έτσι, $A_g = (0, +\infty)$ (είναι $\ln 2 \neq 0$ γιατί $2 \neq 1$)
Για να συγκρίνουμε $g(3)$ και 2 βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $g(3)-2$.

Είναι $g(3) - 2 = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} - 2 = \dfrac{\ln 3 - 2\ln 2}{\ln 2} = \dfrac{\ln 3 - \ln 2^2}{\ln 2} = \dfrac{\ln 3 - \ln 4}{\ln 2} = \dfrac{\ln\frac{3}{4}}{\ln 2}$.

Όμως $\dfrac{3}{4} < 1$ άρα $\ln\dfrac{3}{4} < 0$ και $2 > 1$, οπότε $\ln 2 > 0$.

Είναι $g(3) - 2 < 0 \Leftrightarrow g(3) < 2$.

<u>Εναλλακτικά</u> λύνουμε την

$g(3) < 2 \Leftrightarrow \dfrac{\ln 3}{\ln 2} < 2 \overset{\text{επί } \ln 2>0}{\Leftrightarrow} \ln 3 < 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln 3 < \ln 2^2 \Leftrightarrow \ln 3 < \ln 4$ η οποία αληθεύει, γιατί $3 < 4$.

Δ.2. Για να ορίζεται η f πρέπει $2^x - 3 > 0$ και $\ln(2^x - 3) \neq 0$.

Έχουμε $2^x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 3 \Leftrightarrow \ln 2^x > \ln 3 \Leftrightarrow x\ln 2 > \ln 3 \overset{\ln 2>0}{\Leftrightarrow} x > \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

και

$\ln(2^x - 3) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(2^x - 3) \neq \ln 1 \Leftrightarrow 2^x - 3 \neq 1 \Leftrightarrow 2^x \neq 4 \Leftrightarrow 2^x \neq 2^2 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Από το Δ1 είναι $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} < 2$, οπότε $A_f = (\dfrac{\ln 3}{\ln 2}, 2) \cup (2, +\infty)$.

Δ.3. Είναι $f(\log_2\kappa) = \dfrac{1}{\ln(2^{\log_2\kappa} - 3)} = \dfrac{1}{\ln(\kappa - 3)}$, αφού $2^{\log_2\kappa} = \kappa$.

Έχουμε $f(\log_2\kappa)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\ln(\kappa-3)}<\frac{1}{2}$.

Επειδή $\kappa-3>1$ ισχύει $\ln(\kappa-3)>0$.

Οπότε $\ln(\kappa-3)>2\Leftrightarrow\ln(\kappa-3)>\ln e^2\Leftrightarrow\kappa-3>e^2\Leftrightarrow\kappa>3+e^2$.

Τελικά $\kappa\in(3+e^2,+\infty)$.

Δ.4. Το υπόλοιπο της διαίρεσης $(-x^3-7x^2+6):(x+1)$

είναι $\upsilon(x)=-(-1)^3-7(-1)^2+6=1-7+6=0$.

Έχουμε $\upsilon(x)=(f(\beta)-1)\cdot x+g(\alpha)+g(\alpha^2)+g(\alpha^3)+....+g(\alpha^{20})-\frac{210}{\ln 2}$.

Από την ισότητα των δύο πολυωνύμων έχουμε :

$f(\beta)-1=0$ και $g(\alpha)+g(\alpha^2)+g(\alpha^3)+....+g(\alpha^{20})-\frac{210}{\ln 2}=0$.

Διαδοχικά έχουμε:

$f(\beta)-1=0\Leftrightarrow f(\beta)=1\Leftrightarrow\frac{1}{\ln(2^\beta-3)}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln(2^\beta-3)=\ln e\Leftrightarrow 2^\beta-3=e\Leftrightarrow 2^\beta=e+3$ (1) και

$g(\alpha)+g(\alpha^2)+g(\alpha^3)+....+g(\alpha^{20})-\frac{210}{\ln 2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\ln\alpha}{\ln 2}+\frac{\ln\alpha^2}{\ln 2}+\frac{\ln\alpha^3}{\ln 2}+......+\frac{\ln\alpha^{20}}{\ln 2}=\frac{210}{\ln 2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{\ln 2}(\ln\alpha+2\ln\alpha+3\ln\alpha+....+20\ln\alpha)=\frac{210}{\ln 2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\ln\alpha}{\ln 2}(1+2+3+....+20)=\frac{210}{\ln 2}$ (2).

Το $S=1+2+3+....+20$ είναι άθροισμα των 20 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1=1$, $\omega=1$.Έτσι, $S_{20}=\frac{20}{2}(\alpha_1+\alpha_{20})=10(1+20)=210$.

Από τη (2) προκύπτει $\frac{210\cdot\ln\alpha}{\ln 2}=\frac{210}{\ln 2}\Leftrightarrow\ln\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=e$ (3)

Έτσι, έχουμε $e^{\beta\cdot\ln 2}=(e^{\ln 2})^\beta=2^\beta\overset{(1)}{=}e+3\overset{(3)}{=}\alpha+3$.