

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Να δώσετε τον ορισμό της αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 3

A.2. Να αποδείξετε οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $2\beta = \alpha + \gamma$.

Μονάδες 6

A.3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το 5 είναι μία πιθανή ακέραια ρίζα της εξίσωσης $2x^3 - \lambda x^2 + 6x - 5 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{Z}$.

β) Υπάρχουν τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύει $e^{-x} < 0$.

γ) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης δύο πολυωνύμων είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού, τότε η διαίρεση λέγεται τέλεια.

δ) Η εξίσωση $\eta \mu x = \alpha$, όπου $|\alpha| > 1$, έχει λύση στο \mathbb{R} .

ε) Το άθροισμα των πρώτων n όρων γεωμετρικής προόδου (α_n) με λόγο $\lambda=1$ και πρώτο όρο α_1 είναι ίσο με $S_n = (\alpha_1)^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Μονάδες 5x2=10

A.4. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε έτσι, ώστε τα στοιχεία της κάθε γραμμής να είναι ίσα:

Αριθμός	Με μορφή λογαρίθμου	Με μορφή δύναμης
8	$\log_7(\dots\dots\dots)$	$3^{(\dots\dots\dots)}$
$\dots\dots\dots$	$\log_3(3^4)$	$8^{2\log_8(\dots\dots\dots)}$
$\dots\dots\dots$	$\log(\dots\dots\dots)$	$e^{\ln 2012}$

Μονάδες 6x1=6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

B.1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Μονάδες 6

B.2. Να λύσετε τις τριγωνομετρικές εξισώσεις $\eta\mu x = \alpha$, $\sigma\upsilon\nu x = \beta$ όπου α η διπλή ρίζα της παραπάνω εξίσωσης και β η άλλη ρίζα της ίδιας εξίσωσης.

Μονάδες 6

B.3. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η γραφική παράσταση της f , να μην είναι πάνω από τον άξονα των x .

Μονάδες 8

B.4. Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $f(-x) : (x^2 + 1)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και $g(x) = \eta\mu^2 x + \alpha + \beta + \gamma$, όπου α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $\ln \alpha, \ln \beta, \ln \gamma$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Γ.1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \ln(f(x))$, έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

Μονάδες 5

Γ.2. Έστω γεωμετρική πρόοδος (α_n) με $\alpha_1 = \alpha = \ln e$, $\alpha_2 = e^{\ln \beta}$ και $\alpha_3 = 10^{\log \gamma}$ και $\alpha_5 = 256$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β και γ .

Μονάδες 6

β) Για $\alpha=1, \beta=4$ και $\gamma=16$ να λύσετε την εξίσωση $f(\sigma\upsilon\nu x) = g(x)$, στο διάστημα $(0, 4\pi]$.

Μονάδες 8

Γ.3. Έστω αριθμητική πρόοδος (β_n) με θετική διαφορά ω και με β_1, β_2 τις λύσεις της εξίσωσης $f(\sigma\upsilon\nu x) = g(x)$, στο διάστημα $(0, 4\pi]$. Αν το άθροισμα των πρώτων n όρων της αριθμητικής προόδου (β_n) είναι ίσο με 2550π , να βρείτε τον αριθμό n .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$ και $f(x) = \frac{1}{\ln(2^x - 3)}$.

Δ.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και να συγκρίνετε τους αριθμούς $g(3)$, 2 .

Μονάδες 6

Δ.2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 6

Δ.3. Αν $\kappa > 4$ να λύσετε την ανίσωση $f(\log_2 \kappa) < \frac{1}{2}$.

Μονάδες 6

Δ.4. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $(-x^3 - 7x^2 + 6) : (x+1)$ είναι το πολυώνυμο

$$v(x) = (f(\beta) - 1) \cdot x + g(\alpha) + g(\alpha^2) + g(\alpha^3) + \dots + g(\alpha^{20}) - \frac{210}{\ln 2}$$

να δείξετε ότι $\alpha + 3 = e^{\beta \cdot \ln 2}$, όπου α ανήκει στο πεδίο ορισμού της g και β ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 7

Σας ευχόμαστε επιτυχία