ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 34.

Α.2. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 125.

Α.3. **α.** ΣΩΣΤΟ
β. ΛΑΘΟΣ
γ. ΛΑΘΟΣ
δ. ΣΩΣΤΟ
ε. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει

- $(x+1)^4 \geq 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $x \in IR$.

  και

- $(x-2)^4 \geq 0$ το οποίο ισχύει για κάθε $x \in IR$

  και

- $x+1 \neq 0$ και $x-2 \neq 0$, δηλαδή $x \neq -1$ και $x \neq -2$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = IR - \{-1, 2\}$

Β.2. για κάθε $x \in A = IR - \{-1, 2\}$ ο τύπος της f γίνεται

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)^4}}{x+1} - \frac{\sqrt{(x-2)^4}}{x-2} = \frac{\sqrt{\left[(x+1)^2\right]^2}}{x+1} - \frac{\sqrt{\left[(x-2)^2\right]^2}}{x-2} =$$

$$=\frac{\left|(x+1)^2\right|}{x+1}-\frac{\left|(x-2)^2\right|}{x-2}=\frac{\left|(x+1)^2\right|}{x+1}-\frac{\left|(x-2)^2\right|}{x-2}=x+1-(x-2)=x+1-x+2=3$$

Άρα για κάθε $x \in A = IR - \{-1, 2\}$ ισχύει ότι: $f(x) = 3$.
Έτσι $f(2012) = 3$.

Β.3. Έτσι η ανίσωση $|18-3x| \le f(2012)$ γίνεται:

$$|18-3x| \le f(2012) \Leftrightarrow |3(6-x)| \le 3 \Leftrightarrow |3|\,|(6-x)| \le 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |6-x| \le 1 \Leftrightarrow |x-6| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x-6 \le 1 \Leftrightarrow -1+6 \le x \le 1+6$$

Οπότε $x \in [5, 7]$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1.1. Η εξίσωση γίνεται:

$x + 1 = \lambda^2 - |\lambda| \cdot x \Leftrightarrow |\lambda| \cdot x + x = \lambda^2 - 1$

ή $(|\lambda| + 1) \cdot x = |\lambda|^2 - 1$

ο συντελεστής του αγνώστου x είναι ο $\alpha = |\lambda| + 1$ και ο σταθερός όρος της εξίσωσης ο $\beta = |\lambda|^2 - 1 = (|\lambda| - 1)(|\lambda| + 1)$.

Όμως για κάθε $\lambda \in IR$ ισχύει ότι $|\lambda| \ge 0 \Leftrightarrow |\lambda| + 1 \ge 1 > 0$.

Άρα για κάθε $\lambda \in IR$ ο $\alpha = |\lambda| + 1 \ne 0$, έτσι η εξίσωση έχει για κάθε $\lambda \in IR$, μοναδική λύση ως προς x, την

$$\left(|\lambda|+1\right)\cdot x = |\lambda|^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{\left(|\lambda|+1\right)\cdot x}{\left(|\lambda|+1\right)} = \frac{\left(|\lambda|-1\right)\left(|\lambda|+1\right)}{\left(|\lambda|+1\right)} \Leftrightarrow x = |\lambda| - 1$$

άρα η λύση της εξίσωσης: $x = |\lambda| - 1$, για κάθε $\lambda \in IR$.

Γ.1.2. Για να απέχει η λύση αυτή από τον αριθμό 3, απόσταση που δεν ξεπερνά το 2, άρα:

$$d(x,3) \le 2 \Leftrightarrow |x-3| \le 2 \Leftrightarrow \left||\lambda|-1-3\right| \le 2 \Leftrightarrow \left||\lambda|-4\right| \le 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2 \le |\lambda| - 4 \le 2 \Leftrightarrow -2+4 \le |\lambda| \le 4+2 \Leftrightarrow 2 \le |\lambda| \le 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\lambda| \le 6 \\ \text{και} \\ |\lambda| \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} -6 \le \lambda \le 6 \\ \text{και} \\ \text{ή } \lambda \le -2 \text{ ή } \lambda \ge 2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \lambda \in [-6,-2] \cup [2,6]$$

Γ2. έχουμε τις ευθείες

$\varepsilon_1 : y = (\mu^2 - 4)x + \mu + 1, \ \ \mu \in \mathrm{IR}$ και

$\varepsilon_2 : y = (-\mu^2 + 4\mu - 3)x + 2, \ \ \mu\varepsilon \ \mu \in \mathrm{IR}$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ε_1 είναι ο $\alpha_1 = \varepsilon\varphi\omega_1 = \mu^2 - 4$, όπου ω_1 είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε_1 με τον άξονα $x'x$, ενώ ο συντελεστής διεύθυνσης της ε_2 είναι $\alpha_2 = \varepsilon\varphi\omega_2 = -\mu^2 + 4\mu - 3$ όπου ω_2 είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε_2 με τον άξονα $x'x$.

Για να σχηματίζει η ευθεία ε_1 αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ δηλαδή: $90^o < \omega_1 < 180^o$ πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της ε_1, να είναι αρνητικός δηλαδή $\alpha_1 = \varepsilon\varphi\omega_1 < 0$, άρα $\alpha_1 < 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow \mu \in (-2, 2)$

μ	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\mu^2 - 4$		+	0	-	0	+	

Για να σχηματίζει η ευθεία ε_2 οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$ δηλαδή: $0^o < \omega_2 < 90^o$, πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της ε_2 να είναι θετικός δηλαδή $\alpha_2 = \varepsilon\varphi\omega_2 > 0$, άρα

$\alpha_2 > 0 \Leftrightarrow -\mu^2 + 4\mu - 3 > 0 \Leftrightarrow \mu \in (1, 3)$

μ	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-\mu^2 + 4\mu - 3$		-	0	+	0	-	

Έτσι για να σχηματίζουν η ε_1 αμβλεία γωνία με τον $x'x$ **<u>και</u>** η ε_2 οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$ θα πρέπει να βρούμε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_1 < 0 \\ \text{και} \\ \alpha_2 > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \mu \in (-2, 2) \\ \text{και} \\ \mu \in (1, 3) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \mu \in (1, 2)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Αφού η ακολουθία $(\alpha_\nu), \nu \in IN^*$ είναι αριθμητική πρόοδος θα ισχύει ότι:
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega$, για κάθε $\nu \in IN^*$, άρα για $\nu = 7$ θα έχουμε:
$\alpha_7 = \alpha_1 + (7 - 1)\,\omega = \alpha_1 + 6\omega$ δίνεται όμως ότι $\alpha_7 = -11$, άρα
$\alpha_1 + 6\omega = -11 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6 \cdot (-2) = -11$ έτσι $\alpha_1 = 12 - 11 = 1$, οπότε ο
$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega = 1 + 3(-2) = -5$, οπότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_1$, ,
λαμβάνει τη μορφή $f(x) = x^2 - 5x + 1$.

Δ.2. Και η αντίστοιχη εξίσωση $f(x) = 0$ γίνεται $x^2 - 5x + 1 = 0$ έτσι για τις ρίζες x_1, x_2 της $x^2 - 5x + 1 = 0$ θα έχουμε από τους τύπους Vieta:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5}{1} = 5 \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1.$$

Τότε:

$$A = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 5$$

$$B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2}{x_1 x_2} + \frac{x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}$$

$$B = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{5^2 - 1}{1} = 23$$

$$\Gamma = \sqrt[3]{\sqrt{400(x_1 + x_2) - 2012 x_1 x_2 + 12}} = \sqrt[3]{\sqrt{400 \cdot 4 - 2012 \cdot 1 + 12}}$$

$$\Gamma = \sqrt[3]{\sqrt{2000 - 2012 + 12}} = 0$$

Δ.3. Η εξίσωση: $\left|x^2 - B - 2\right| + \left|x - A\right| = \Gamma$ με βάση τα παραπάνω θα έχουμε :

$$\left|x^2 - 23 - 2\right| + \left|x - 5\right| = 0 \Leftrightarrow \left|x^2 - 25\right| + \left|x - 5\right| = 0$$

Όμως $|\alpha| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$.
Έτσι $\left|x^2 - 25\right| + \left|x - 5\right| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$ και $x - 5 = 0$ και η κοινή λύση των δύο εξισώσεων είναι η $x = 5$.